Capitolo 2

Prodotti tensoriali

2.1 Prodotto tensoriale di moduli

Siano R un anello con unità 1, M un R-modulo destro, N un R-modulo sinistro.

Definizione 2.1.1 *Un'applicazione $f : M \times N \to P$ del prodotto cartesiano $M \times N$ in un gruppo abeliano additivo P si dice* **bilanciata** *se:*

1) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$;

2) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$;

3) $f(xa, y) = f(x, ay)$

($x, x_1, x_2 \in M$; $y, y_1, y_2 \in N$; $a \in R$).

Osservazione. Si noti che 1), 2), 3) implicano in particolare: $f(x, 0) = f(0, y) = 0$; $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$ per ogni $x \in M$, $y \in N$.

Definizione 2.1.2 *Si dice* **prodotto tensoriale** *di M e N (sull'anello R) un gruppo abeliano T che soddisfi le seguenti condizioni:*

a) *esiste un'applicazione bilanciata $t : M \times N \to T$ tale che $t(M \times N)$ generi T;*

b) *dati un qualsiasi gruppo abeliano P e un'applicazione bilanciata $f : M \times N \to P$, esiste un omomorfismo α del gruppo abeliano T nel gruppo abeliano P, tale che sia $f = \alpha \circ t$, i.e. tale che commuti il diagramma*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "\alpha"] \\ P & \end{tikzcd}$$

(Proprietà universale del prodotto tensoriale).

Osservazione. Si noti che, assegnata l'applicazione bilanciata f, l'omomorfismo α è univocamente determinato, dal momento che $T = < t(x, y) \mid (x, y) \in M \times N >$. In altri termini, ogni applicazione bilanciata $f : M \times N \to P$ si fattorizza in un unico modo attraverso t.

È poi chiaro che l'applicazione $f \to \alpha$ stabilisce una biiezione fra l'insieme delle applicazioni bilanciate da $M \times N$ a P, e l'insieme dei morfismi da T a P, dal momento che per ogni $\alpha : T \to P$ l'applicazione $\alpha \circ t$ è bilanciata.

Proposizione 2.1.1 (Unicità del prodotto tensoriale) *Esiste, a meno d'isomorfismi, al più un prodotto tensoriale di M e N (su R).*

DIM. Siano T_1 e T_2 due prodotti tensoriali di M e N su R, e siano t_1, t_2 le corrispondenti applicazioni bilanciate (soddisfacenti le condizioni *a)* e *b)* della Definizione 2.1.2). Allora, in particolare, i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & T_1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \\ T_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t_1"'] & T_2 \arrow[dl, "\alpha_2"] \\ T_1 & \end{tikzcd}$$

Esistono cioè dei morfismi $\alpha_1 : T_1 \to T_2$, $\alpha_2 : T_2 \to T_1$ tali che: $t_2 = \alpha_1 \circ t_1$, $t_1 = \alpha_2 \circ t_2$. Segue $t_1 = \alpha_2 \circ \alpha_1 \circ t_1$, $t_2 = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ t_2$, ovvero $\alpha_2 \circ \alpha_1$ è l'identità su $\mathrm{Im}(t_1)$, e $\alpha_1 \circ \alpha_2$ è l'identità su $\mathrm{Im}(t_2)$. Poiché $T_1 = < t_1(x,y) \mid (x,y) \in M \times N >$ e $T_2 = < t_2(x,y) \mid (x,y) \in M \times N >$, si conclude che $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \mathrm{Id}_{T_1}$ e $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \mathrm{Id}_{T_2}$, ovvero che α_1 è un isomorfismo fra T_1 e T_2. □

Teorema 2.1.1 (Esistenza del prodotto tensoriale) *Siano M un R-modulo destro, N un R-modulo sinistro. Allora esiste un gruppo abeliano T soddisfacente le condizioni a) e b) della Definizione 2.1.2.*

DIM. Per costruire T consideriamo lo $\mathbf{Z}$-modulo libero sull'insieme $M \times N$, che possiamo identificare con l'insieme F di tutte le $\mathbf{Z}$-combinazioni lineari 'formali' $\sum z_i(x_i, y_i)$ ($z_i \in \mathbf{Z}$, $(x_i, y_i) \in M \times N$), munito dell'ovvia operazione di somma 'puntuale'.
Consideriamo poi in F il sottogruppo H generato dagli elementi della forma: $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)$; $(x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)$; $(xa, y) - (x, ay)$ $(x, x_1, x_2 \in M$; $y, y_1, y_2 \in N$; $a \in R)$. Denotiamo infine con T il gruppo quoziente F/H, e con t l'applicazione $(x, y) \to H + (x, y)$ da $M \times N$ a T.
Proviamo che la coppia (T, t) definisce un prodotto tensoriale come richiesto dalla Definizione 2.1.2. Innanzitutto t è bilanciata. Infatti: *1)* $t(x_1 + x_2, y) - t(x_1, y) - t(x_2, y) = H + (x_1 + x_2, y) - (H + (x_1, y)) - (H + (x_2, y)) = H + ((x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)) = H = 0_T$. In modo simile si provano *2)* e *3)*. (Si noti che quozientare F mediante H serve precisamente a "rendere l'immersione di $M \times N$ in F bilanciata".)
Infine, poiché gli elementi $(x, y) \in M \times N$ generano F, gli elementi $t(x, y)$ generano T. Dunque la condizione *a)* è soddisfatta da T.
Sia ora $f : M \times N \to P$ un'applicazione bilanciata di $M \times N$ in un gruppo abeliano additivo P. Essendo F libero su $M \times N$, vi è un unico omomorfismo di gruppi

abeliani $\bar{f}: F \to P$ tale che $\bar{f}(x,y) = f(x,y)$ per ogni $x \in M$, $y \in N$. Poiché f soddisfa le condizioni *1)*, *2)*, *3)*, si ha:

$$\begin{aligned}
\bar{f}((x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y)) &= f(x_1+x_2,y)-f(x_1,y)-f(x_2,y)=0,\\
\bar{f}((x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2)) &= f(x,y_1+y_2)-f(x,y_1)-f(x,y_2)=0,\\
\bar{f}((xa,y)-(x,ay)) &= f(xa,y)-f(x,ay)=0.
\end{aligned}$$

Dunque $H \subseteq \ker \bar{f}$, e pertanto $\bar{f}$ (cfr. Teorema 1.3.1) induce un (unico) omomorfismo $\alpha : T \to P$ definito da $\alpha(H+(x,y)) = \bar{f}(x,y) = f(x,y)$ $((x,y) \in M \times N)$.
Si conclude che T soddisfa anche la condizione *b)* della definizione di prodotto tensoriale. □

Notazione. Denoteremo il prodotto tensoriale T di un R-modulo destro M e un R-modulo sinistro N (unico a meno d'isomorfismi) con il simbolo $M \otimes_R N$, e l'applicazione bilanciata t con il simbolo $\otimes$, scrivendo dunque $t(x,y) = x \otimes y$ $((x,y) \in M \times N)$.

La costruzione che ci ha permesso di provare l'esistenza del prodotto tensoriale può anche essere dimenticata. L'essenziale è tenere presenti le proprietà *a)* e *b)* della definizione. In particolare, ricordiamo che:
1. il gruppo abeliano $M \otimes_R N$ è generato dagli elementi $x \otimes y$ $(x \in M,\ y \in N)$;
2. valgono le seguenti regole di calcolo:

1') $(x_1+x_2)\otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$; $\qquad x \otimes (y_1+y_2) = x\otimes y_1 + x \otimes y_2$;

2') $(xa)\otimes y = x \otimes (ay)$;

3') $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$; $\qquad (-x)\otimes y = x \otimes (-y) = -(x \otimes y)$.

(Osserviamo che 1') e 3') ci consentono di affermare che ogni elemento di $M \otimes_R N$ è *somma* di un numero finito di "tensori elementari", i.e. elementi della forma $x_i \otimes y_i$ $(x_i \in M, y_i \in N)$, dal momento che, per ogni intero n, risulta $n(x_i \otimes y_i) = (nx_i)\otimes y_i = x_i \otimes (ny_i)$.)

Osservazione. Notiamo esplicitamente che, in generale, $x \otimes y = 0$ *non* implica $x = 0$ o $y = 0$.

Esempio

Per ogni intero $a > 0$, $\mathbf{Z}_a$ denoti il gruppo additivo delle classi di resti modulo a, i.e. il gruppo quoziente $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ (ove $a\mathbf{Z}$ denota il sottogruppo di $\mathbf{Z}$ costituito dai multipli di a). Per $a, b \in \mathbf{Z}$, si consideri il prodotto tensoriale $\mathbf{Z}_a \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_b$, ove $\mathbf{Z}_a$ e $\mathbf{Z}_b$ sono considerati rispettivamente come $\mathbf{Z}$-modulo destro e $\mathbf{Z}$-modulo sinistro (definendo $[x]n = n[x] (= [nx])$ per ogni $[x] \in \mathbf{Z}_a$, $n \in \mathbf{Z}$). Allora, per ogni $[x] \in \mathbf{Z}_a$, $[y] \in \mathbf{Z}_b$, si ha: $a([x]\otimes[y]) = a[x]\otimes[y] = [0]\otimes[y] = 0$, $b([x]\otimes[y]) = [x]\otimes b[y] = [x]\otimes[0] = 0$.
Se in particolare $M.C.D(a,b) = 1$, esistono due interi r, s tali che $1 = ra + sb$, e si ha $[x]\otimes[y] = 1([x]\otimes[y]) = (ra+sb)([x]\otimes[y]) = r(a([x]\otimes[y])) + s(b([x]\otimes[y])) = 0$.
Da cui $\mathbf{Z}_a \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_b = \mathbf{0}$.

Lemma 2.1.1

i) *Sia N un R-modulo sinistro, e si consideri $R = R_R$ come R-modulo regolare destro. Allora l'applicazione $y \to 1 \otimes y$ $(y \in N)$ realizza un isomorfismo di $\mathbf{Z}$-moduli fra N e $R \otimes_R N$.*

ii) *Sia M un R-modulo destro, e si consideri $R = {}_R R$ come R-modulo regolare sinistro. Allora l'applicazione $x \to x \otimes 1$ $(x \in M)$ realizza un isomorfismo di $\mathbf{Z}$-moduli fra M e $M \otimes_R R$.*

DIM. Proviamo *i)*. L'applicazione $\eta : y \to 1 \otimes y$ $(y \in N)$ è certamente un morfismo di gruppi abeliani, poiché $1 \otimes (y_1 + y_2) = 1 \otimes y_1 + 1 \otimes y_2$. È facile verificare che, essendo N un R-modulo, l'applicazione $f : R \times N \to N$ definita ponendo $f(r, y) = ry$ $(y \in N,\ r \in R)$ è bilanciata. Dunque esiste un morfismo $\alpha : R \otimes_R N \to N$ tale che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd} R \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f"'] & R \otimes_R N \arrow[dl, "\alpha"] \\ N & \end{tikzcd}$$

i.e. tale che $\alpha(r \otimes y) = ry$ $(r \in R,\ y \in N)$. Si vede che $(\alpha \circ \eta)y = \alpha(1 \otimes y) = 1y = y$, i.e. $(\alpha \circ \eta) = \mathrm{Id}_N$; e $(\eta \circ \alpha)(r \otimes y) = \eta(ry) = 1 \otimes ry = r \otimes y$, i.e. $\eta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{R \otimes_R N}$. Si conclude che η è un isomorfismo di $\mathbf{Z}$-moduli.
La dimostrazione di *ii)* è del tutto analoga. $\square$

Corollario 2.1.1 *$R \otimes_R R$ è isomorfo al gruppo additivo di R (tramite l'isomorfismo $r \otimes s \to rs$ $(r, s \in R)$).*

Osservazione. Il Lemma 2.1.1 ci dà l'opportunità di fare un breve commento il cui spirito è: "i prodotti tensoriali vanno maneggiati con cautela".

Siano M un R-modulo destro, N un R-modulo sinistro, M_1 un sottomodulo di M. Possiamo allora considerare sia il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$, sia il prodotto tensoriale $M_1 \otimes_R N$ (ove M_1 è considerato per se stesso come R-modulo destro). L'espressione $x_1 \otimes y$ $(x_1 \in M_1,\ y \in N)$ è di per sé ambigua. Infatti se denotiamo con t, t_1 le applicazioni bilanciate che definiscono $M \otimes_R N$, $M_1 \otimes_R N$ rispettivamente, l'espressione $x_1 \otimes y$ può significare $t(x_1, y)$, oppure $t_1(x_1, y)$. L'ambiguità verrebbe a cadere se si potesse immergere $M_1 \otimes_R N$ in $M \otimes_R N$ in modo tale che risultasse $t_1(x_1, y) = t(x_1, y)$. Ma questo, come mostra l'esempio seguente, è in generale impossibile. Dunque occorre sempre, in generale, specificare se si sta considerando $x_1 \otimes y$ come elemento di $M \otimes_R N$ oppure come elemento di $M_1 \otimes_R N$.

Esempio

Siano $M = \mathbf{Q}$ (campo dei numeri razionali), $M_1 = \mathbf{Z}$, $N = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (considerati come $\mathbf{Z}$-moduli). Allora, in forza del Lemma 2.1.1, si ha $M_1 \otimes_{\mathbf{Z}} N \simeq N$. Ma, per ogni $x \in M$, $y \in N$, risulta $x \otimes y = (2\frac{1}{2}x) \otimes y = (\frac{1}{2}x) \otimes 2y = (\frac{1}{2}x) \otimes 0 = 0$, ovvero $M \otimes_{\mathbf{Z}} N = 0$.

Lemma 2.1.2 *Siano $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $N = \bigoplus_{j \in J} N_j$ (somme dirette di R-sottomoduli (destri, sinistri rispettivamente)). Allora il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ è isomorfo come $\mathbf{Z}$-modulo alla somma diretta $\bigoplus_{i \in I, j \in J}(M_i \otimes_R N_j)$.*

DIM. Poniamo $T = M \otimes_R N$, $T' = \bigoplus_{i \in I, j \in J}(M_i \otimes_R N_j)$, $f : M \times N \to T'$ definita da $f(\sum_{i \in I} x_i, \sum_{j \in J} y_j) = \sum_{i \in I, j \in J} x_i \otimes y_j$ ($x_i \in M_i$; $y_j \in N_j$). Poiché le applicazioni $\otimes$ sono bilanciate, f è bilanciata. Esiste dunque un morfismo $\alpha : T \to T'$ tale che $\alpha((\sum_{i \in I} x_i) \otimes (\sum_{j \in J} y_j)) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j$.
Denotiamo ora con $f_{i,j}$ l'applicazione da $M_i \times N_j$ a T definita da: $(x_i, y_j) \to x_i \otimes y_j$ (considerato come elemento di T!). $f_{i,j}$ è evidentemente bilanciata, e pertanto esiste un morfismo $\beta_{i,j} : M_i \otimes_R N_j \to T$, tale che commuti il diagramma:

$$\begin{tikzcd} M_i \times N_j \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f_{i,j}"'] & M_i \otimes_R N_j \arrow[dl, "\beta_{i,j}"] \\ T & \end{tikzcd}$$

i.e. $\beta_{i,j}(x_i \otimes y_j) = x_i \otimes y_j$ (quest'ultimo considerato come elemento di T!).
Sia ora β l'omomorfismo da T' a T definito dall'essere $\beta_{|M_i \otimes_R N_j} = \beta_{i,j}$ per ogni $i \in I, j \in J$ (ed esteso a T' per additività). Si ha: $\beta \circ \alpha((\sum_{i \in I} x_i) \otimes (\sum_{j \in J} y_j)) = \beta(\sum_{i,j}(x_i \otimes y_j)) = \sum_{i,j} \beta_{i,j}(x_i \otimes y_j) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j = (\sum_{i \in I} x_i) \otimes (\sum_{j \in J} y_j)$ (essendo $\otimes$ biadditiva in T). Si conclude che $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_T$. In modo analogo si prova che $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{T'}$, e quindi α è un isomorfismo fra T e T'. □

Corollario 2.1.2

i) Siano M un R-modulo destro libero su un insieme X, N un R-modulo sinistro. Il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ è isomorfo, come gruppo abeliano, alla somma diretta di $|X|$ copie del gruppo additivo di N.

('Internamente', possiamo rappresentare $M \otimes_R N$ come $\bigoplus_{x \in X} N_x$, ove $N_x = \{x \otimes y \mid y \in N\} \simeq N$.)

ii) Siano M un R-modulo destro, N un R-modulo sinistro libero su un insieme Y. Il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ è isomorfo alla somma diretta di $|Y|$ copie del gruppo additivo di M.

iii) *Siano M un R-modulo destro libero su un insieme X, N un R-modulo sinistro libero su un insieme Y. Il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ è isomorfo alla somma diretta di $|X \times Y|$ copie del gruppo additivo $(R, +)$.*

DIM. *i)* Poiché M è libero su X, si ha $M = \bigoplus_{x \in X} xR$, ove $xR \simeq R_R$ per ogni $x \in X$. Dunque, per il Lemma 2.1.2, $M \otimes_R N \simeq \bigoplus_X (R_R \otimes_R N)$ e, per il Lemma 2.1.1, $R_R \otimes_R N \simeq N$ (come gruppi abeliani). Si conclude che $M \otimes_R N$ è isomorfo a $\bigoplus_X N$, come volevasi.
ii) Si prova esattamente come *i)*.
iii) Per ipotesi $M \simeq \bigoplus_X R_R$, $N \simeq \bigoplus_Y {}_RR$. Da *i)* segue allora

$$M \otimes_R N \simeq \bigoplus_X (\bigoplus_Y ({}_RR)) = \bigoplus_{X \times Y} {}_RR$$

(come gruppi abeliani), che è la tesi. □

Di fondamentale importanza è la seguente:

Proposizione 2.1.2 (Proprietà funtoriale del prodotto tensoriale)
Siano M, M' R-moduli destri; N, N' R-moduli sinistri; $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, $\beta \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Allora esiste (ed è unico) $\mu \in \mathrm{Hom}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ tale che $\mu(x \otimes y) = \alpha(x) \otimes \beta(y)$ $(x \in M,\ y \in N)$.
Scriviamo $\mu = \alpha \otimes \beta$. Si ha:

i) *Se $\alpha' : M' \to M''$, $\beta' : N' \to N''$ sono omomorfismi di R-moduli,*

$$(\alpha' \otimes \beta') \circ (\alpha \otimes \beta) = (\alpha' \circ \alpha) \otimes (\beta' \circ \beta).$$

ii) $\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_N = \mathrm{Id}_{M \otimes_R N}$.

DIM. L'applicazione $f : M \times N \to M' \otimes_R N'$ definita da $f(x, y) = \alpha(x) \otimes \beta(y)$ $(x \in M,\ y \in N)$ è bilanciata (perché α e β sono morfismi di R-moduli e $\otimes$ è bilanciata). Dunque esiste un (unico) morfismo $\mu : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ tale che $\mu(x \otimes y) = \alpha(x) \otimes \beta(y)$. Denotiamo μ con il simbolo $\alpha \otimes \beta$:

i) $(\alpha' \otimes \beta') \circ (\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = (\alpha' \otimes \beta')(\alpha(x) \otimes \beta(y)) = (\alpha'(\alpha(x))) \otimes (\beta'(\beta(y))) = (\alpha' \circ \alpha) \otimes (\beta' \circ \beta)(x \otimes y)$;

ii) $(\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_N)(x \otimes y) = \mathrm{Id}_M(x) \otimes \mathrm{Id}_N(y) = x \otimes y$.

Segue la tesi, poiché gli elementi $x \otimes y$ $(x \in M,\ y \in N)$ generano $M \otimes_R N$. □

Definizione 2.1.3 *Si dice che $\alpha \otimes \beta$ è il* **prodotto tensoriale** *dei morfismi α e β.*

Osservazione. Nel linguaggio delle categorie, denotando con mod-R, R-mod, $\mathbf{Z}$-mod rispettivamente le categorie degli R-moduli destri, degli R-moduli sinistri e degli $\mathbf{Z}$-moduli, le proprietà *i)*, *ii)* esprimono il fatto che le applicazioni $(M, N) \to M \otimes_R N$, $(\alpha, \beta) \to \alpha \otimes \beta$ definiscono un *funtore* $(= \otimes_R)$ dalla categoria prodotto mod-$R \times R$-mod alla categoria $\mathbf{Z}$-mod.

Esercizio

Siano M un R-modulo destro, N un R-modulo sinistro, e si aggiungano a M la struttura di R^{op}-modulo sinistro ponendo $rx = xr$ ($r \in R$, $x \in M$), e a N la struttura di R^{op}-modulo destro ponendo $yr = ry$ ($r \in R$, $y \in N$). Allora esiste un isomorfismo $\mu : M \otimes_R N \to N \otimes_{R^{op}} M$ tale che $\mu(x \otimes y) = y \otimes x$ ($x \in M$, $y \in N$).

(Traccia: Le applicazioni $f_1 : M \times N \to N \otimes_{R^{op}} M$, $f_2 : N \times M \to M \otimes_R N$ definite da $f_1(x, y) = y \otimes x$, $f_2(y, x) = x \otimes y$, sono bilanciate. Quindi si estendono a morfismi $\alpha_1 : M \otimes_R N \to N \otimes_{R^{op}} M$, $\alpha_2 : N \otimes_{R^{op}} M \to M \otimes_R N$ uno inverso dell'altro.)

In particolare, se R è commutativo, $x \otimes y \to y \otimes x$ definisce un isomorfismo $M \otimes_R N \to N \otimes_R M$.

Osservazione 1. L'applicazione

$$f : \mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

definita ponendo $f(\alpha, \beta) = \alpha \otimes \beta$ è *bilanciata* (verificarlo!). In altri termini valgono per il prodotto tensoriale di morfismi le seguenti proprietà:
1) $(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta = \alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta$
2) $\alpha \otimes (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \otimes \beta_1 + \alpha \otimes \beta_2$
3) $z\alpha \otimes \beta = \alpha \otimes z\beta$
($\alpha, \alpha_i \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$; $\beta, \beta_i \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$; $z \in \mathbf{Z}$).
Ne segue che esiste un (unico) morfismo $\sigma : \mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_R(N, N') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$, tale che $\sigma(\alpha \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta$. A sinistra, $\alpha \otimes \beta$ designa un elemento del prodotto tensoriale $\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_R(N, N')$, mentre a destra $\alpha \otimes \beta$ designa il prodotto tensoriale dei morfismi α, β. Poiché σ non è in generale né iniettivo né suriettivo, occorre in generale specificare, in un contesto dato, che cosa si intende designare quando si scrive $\alpha \otimes \beta$.

Osservazione 2. Siano, in particolare: M_1 un sottomodulo di un R-modulo destro M, N_1 un sottomodulo di un R-modulo sinistro N, $i_{M_1} : M_1 \to M$ l'inserzione di M_1 in M, $i_{N_1} : N_1 \to N$ l'inserzione di N_1 in N.
Il prodotto tensoriale $i_{M_1} \otimes i_{N_1}$ dei monomorfismi i_{M_1}, i_{N_1} è un omomorfismo di $M_1 \otimes_R N_1$ in $M \otimes_R N$, ma *non* è in generale un monomorfismo: in altri termini, l'immagine $(i_{M_1} \otimes i_{N_1})(M_1 \otimes_R N_1) = <x_1 \otimes y_1 \mid x_1 \in M_1, y_1 \in N_1>$ non è in generale isomorfa a $M_1 \otimes_R N_1$. (Lo prova l'esempio prodotto dopo il Lemma 2.1.1, nel quale $M = (\mathbf{Q}, +)$, $M_1 = (\mathbf{Z}, +)$, $N_1 = N = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$, e il prodotto tensoriale $i_{M_1} \otimes i_{N_1} = i_{\mathbf{Z}} \otimes 1_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ è il morfismo nullo, cioè $(i_{M_1} \otimes i_{N_1})(M_1 \otimes_{\mathbf{Z}} N_1) = 0$, mentre $M_1 \otimes_{\mathbf{Z}} N_1 = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
Tuttavia, se si è nella situazione del Lemma 2.1.2, cioè $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $N = \bigoplus_{j \in J} N_j$, $M \otimes_R N \simeq \bigoplus_{i,j} M_i \otimes_R N_j$, i prodotti tensoriali $i_{M_i} \otimes i_{N_j} : M_i \otimes_R N_j \to M \otimes_R N$ *sono monomorfismi* (come si evince dalla dimostrazione del Lemma 2.1.2, ove gli $i_{M_i} \otimes i_{N_j}$ sono chiamati $\beta_{i,j}$!).

Le considerazioni precedenti ci assicurano che la situazione descritta nell'Osservazione che segue il Lemma 2.1.1, e ripresa qui sopra, non si presenta quando

M_1 è *addendo diretto* di M. In altre parole, se $M = M_1 \oplus M_2$, $M \otimes_R N \simeq (M_1 \otimes_R N) \oplus (M_2 \otimes_R N)$, e $M_1 \otimes_R N$ è immerso canonicamente in $M \otimes_R N$ mediante il monomorfismo $i_{M_1} \otimes \mathrm{Id}_N$.

2.2 Bimoduli

Il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ è semplicemente un gruppo abeliano, e non ha la struttura di R-modulo. Per fornirlo di una struttura di R-modulo occorre introdurre ipotesi aggiuntive su M (o N). La nozione chiave in questo contesto è quella di *bimodulo.*

Definizione 2.2.1 *Siano S, R anelli con 1, e sia M un gruppo abeliano additivo. Si dice che M è un (S, R)-***bimodulo** *se sono definite delle azioni di S e R su M $x \to sx$; $x \to xr$ ($x \in M$; $s \in S$; $r \in R$), rispetto alle quali M sia un S-modulo sinistro e un R-modulo destro, rispettivamente; e se inoltre è verificata la seguente "associatività":*

$$(*) \qquad s(xr) = (sx)r \qquad (x \in M;\ s \in S;\ r \in R).$$

($(*)$ dice che l'azione a sinistra di S su M e l'azione a destra di R su M *commutano.*)

Esempi

(1) Siano R un anello *commutativo*, M un R-modulo sinistro. M diventa un (R, R)-bimodulo definendo $xr = rx$ ($x \in M$; $r \in R$). (Sappiamo infatti che, con tale definizione, M è un R-modulo destro. La condizione $(*)$ è verificata, poiché $s(xr) = s(rx) = (sr)x = (rs)x = r(sx) = (sx)r$ per ogni $r, s \in R$, $x \in M$.)

(2) Sia $R = S = M$. R è un (R, R)-bimodulo, quando si consideri simultaneamente R come R-modulo regolare sinistro ${}_RR$ e come R-modulo regolare destro R_R. $(*)$ è semplicemente la proprietà associativa nell'anello R.

(3) Siano M un R-modulo destro, $S = \mathrm{End}_R(M)$. M è un S-modulo sinistro per l'azione $fx = f(x)$ ($f \in \mathrm{End}_R(M)$, $x \in M$). $(*)$ è soddisfatta, poiché $f(xa) = f(x)a = (fx)a$, essendo f un endomorfismo di un R-modulo destro. Dunque M è un $(\mathrm{End}_R(M), R)$-bimodulo.

(4) Siano M un R-modulo destro, $S = \mathbf{Z}$, e si consideri M come $\mathbf{Z}$-modulo sinistro nel modo ovvio (i.e. nx è il multiplo secondo n di x, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, $x \in M$). Allora M ha, come si vede subito, una struttura di $(\mathbf{Z}, R)$-bimodulo.
Similmente, ogni R-modulo sinistro ha una ovvia struttura di $(R, \mathbf{Z})$-bimodulo. (In questo senso, i moduli "unilaterali" si possono tutti leggere come bimoduli.)

Scriveremo $M = {}_SM_R$ per indicare che M è un (S, R)-bimodulo. Se $N = {}_SN_R$ è un altro (S, R)-bimodulo, diremo che un'applicazione $f : {}_SM_R \to {}_SN_R$ è un omomorfismo di bimoduli se è contemporaneamente un S- e un R-omomorfismo di M in N.

Osserviamo che, se $M = {}_SM_R$, per ogni $s \in S$ l'applicazione $\epsilon_s : x \to sx$ $(x \in M)$ è un R-endomorfismo di M (considerato come R-modulo destro) in forza di $(*)$ (si ha infatti: $\epsilon_s(xr) = s(xr) = (sx)r = \epsilon_s(x)r$ per ogni $r \in R$). Similmente si ha che, per ogni $r \in R$, l'applicazione $\eta_r : x \to xr$ $(x \in M)$ è un S-endomorfismo di M (considerato come S-modulo sinistro).

Siano ora R, S, T degli anelli; ${}_SM_R$, ${}_TN_R$ bimoduli; e si denoti con $\mathrm{Hom}_R({}_SM_R, {}_TN_R)$ l'insieme degli omomorfismi di M in N (considerati solo come R-moduli destri). Naturalmente $\mathrm{Hom}_R({}_SM_R, {}_TN_R)$ non è altro che $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, ed è un gruppo abeliano additivo.
Definiamo ora, per ogni $s \in S$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$:

$$fs = f \circ \epsilon_s \quad (\text{i.e. } (fs)(x) = f(sx) \ (x \in M)).$$

Poiché $\epsilon_s \in \mathrm{End}_R(M)$, si ha $fs \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Similmente, per ogni $t \in T$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ poniamo:

$$tf = \epsilon_t \circ f \quad (\text{i.e. } (tf)(x) = t(f(x)) \ (x \in M)).$$

Poiché $\epsilon_t \in \mathrm{End}_R(N)$, si ha $tf \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$.
È facile verificare che: $(f_1+f_2)s = f_1s+f_2s$, $f(s_1+s_2) = fs_1+fs_2$, $f(s_1s_2) = (fs_1)s_2$ e $f1 = f$; $t(f_1 + f_2) = tf_1 + tf_2$, $(t_1 + t_2)f = t_1f + t_2f$, $(t_1t_2)f = t_1(t_2f)$ e $1f = f$; e infine che $(tf)s = t(fs)$ $(s, s_1, s_2 \in S;\ t, t_1, t_2 \in T;\ f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, N))$.
(Per l'ultima relazione, notiamo che $((tf)s)(x) = (tf)(sx) = t(f(sx)) = t((fs)x) = (t(fs))(x)$, per ogni $x \in M$.)
Possiamo pertanto formulare la seguente:

Proposizione 2.2.1 *Il gruppo abeliano* $\mathrm{Hom}_R({}_SM_R, {}_TN_R)$ *è un* (T, S)*-bimodulo per le azioni* tf, fs *definite da* $(tf)(x) = t(f(x))$, $(fs)(x) = f(sx)$ $(s \in S;\ t \in T;\ x \in M)$.

Similmente, considerando dei bimoduli ${}_RM_S$, ${}_RN_T$ si ottiene:

Proposizione 2.2.2 *Il gruppo abeliano* $\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN_T)$ *è un* (S, T)*-bimodulo per le azioni* sf, ft *definite da* $(sf)(x) = f(xs)$, $(ft)(x) = f(x)t$ $(s \in S;\ t \in T;\ x \in M)$.

Le proposizioni precedenti ci dicono che due bimoduli con lo stesso anello a destra (o a sinistra) si comportano bene rispetto a Hom: l'Hom di tali bimoduli è un bimodulo.

Per quanto riguarda il prodotto tensoriale, si ha la seguente:

Proposizione 2.2.3 *Siano* ${}_SM_R$, ${}_RN_T$ *due bimoduli, e si consideri il prodotto tensoriale* $M \otimes_R N$ *(ove si pensa* M *come* R*-modulo destro,* N *come* R*-modulo sinistro). Allora* $M \otimes_R N$ *è un* (S, T)*-bimodulo per le azioni*

$$\begin{aligned} sz &= (\epsilon_s \otimes \mathrm{Id}_N)z, \\ zt &= (\mathrm{Id}_M \otimes \eta_t)z \qquad (z \in M \otimes_R N) \end{aligned}$$

(N.B.: $\epsilon_s \in \mathrm{End}_R(M)$, $\eta_t \in \mathrm{End}_R(N)$*).*

DIM. $\epsilon_s \otimes \mathrm{Id}_N$ e $\mathrm{Id}_M \otimes \eta_t$ sono endomorfismi del gruppo abeliano $M \otimes_R N$, determinati dalle immagini dei "tensori elementari" $x \otimes y$: $s(x \otimes y) = sx \otimes y$, $(x \otimes y)t = x \otimes yt$ $(x \in M;\ y \in N)$. Si ha dunque: $s(z_1 + z_2) = sz_1 + sz_2$; $(s_1 + s_2)z = s_1 z + s_2 z$ (poiché $(s_1 + s_2)x \otimes y = (s_1 x) \otimes y + (s_2 x) \otimes y = s_1(x \otimes y) + s_2(x \otimes y)$); $(s_1 s_2)z = s_1(s_2 z)$ (poiché $(s_1 s_2)(x \otimes y) = (s_1 s_2)x \otimes y = s_1(s_2 x) \otimes y = s_1(s_2 x \otimes y) = s_1(s_2(x \otimes y))$); e infine $1z = z$. Pertanto sz definisce una struttura di S-modulo sinistro su $M \otimes_R N$. Similmente, zt definisce una struttura di T-modulo destro. Infine $(sz)t = s(zt)$, poiché $(s(x \otimes y))t = (sx \otimes y)t = sx \otimes yt = s(x \otimes yt) = s((x \otimes y)t)$. Dunque $M \otimes_R N$ è un (S, T)-bimodulo. □

Nel seguito, ci occuperemo in particolare del caso in cui $M = {}_SM_R$, e $N = {}_RN$.
La dimostrazione della Proposizione precedente prova in particolare che:

Corollario 2.2.1 *Se M è un (S, R)-bimodulo, e N è un R-modulo sinistro, il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ ha una struttura di S-modulo sinistro per l'azione*

$$s(x \otimes y) = (sx) \otimes y \quad (s \in S;\ x \in M;\ y \in N).$$

Similmente, se M è un R-modulo destro, e N è un (R, T)-bimodulo, $M \otimes_R N$ ha una struttura di T-modulo destro per l'azione

$$(x \otimes y)t = x \otimes yt \quad (t \in T;\ x \in M;\ y \in N).$$

Anche i Lemmi 2.1.1 e 2.1.2 hanno una versione in termini di bimoduli:

Lemma 2.2.1 *Si consideri R come (R, R)-bimodulo (i.e. $R = {}_RR_R$), e siano M un (S, R)-bimodulo, N un (R, T)-bimodulo. Allora:*

i) $M \otimes_R R$ $(= ({}_SM_R) \otimes_R ({}_RR_R))$ *è isomorfo a M come (S, R)-bimodulo;*

ii) $R \otimes_R N$ $(= ({}_RR_R) \otimes_R ({}_RN_T))$ *è isomorfo a N come (R, T)-bimodulo.*

DIM. *i)* Si verifica facilmente che l'isomorfismo di gruppi abeliani $x \otimes r \to xr$ è un isomorfismo di bimoduli.
Similmente si prova *ii)*. □

Lemma 2.2.2 *Siano ${}_SM_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$, ${}_RN_T = \bigoplus_{j \in J} N_j$ (somme dirette di sottobimoduli). Allora $({}_SM_R) \otimes_R ({}_RN_T)$ è isomorfo a $\bigoplus_{i \in I, j \in J} M_i \otimes_R N_j$, come (S, T)-bimoduli.*

Conseguenza dei risultati finora provati sui bimoduli è la 'proprietà associativa' del prodotto tensoriale di bimoduli:

Proposizione 2.2.4 *Siano ${}_RM_S$, ${}_SN_T$, ${}_TP_U$ dei bimoduli. Allora esiste un isomorfismo di (R, U)-bimoduli*

$$\tau : ({}_RM_S \otimes {}_SN_T) \otimes {}_TP_U \to {}_RM_S \otimes ({}_SN_T \otimes {}_TP_U),$$

tale che $(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{\tau} x \otimes (y \otimes z)$ $(x \in M;\ y \in N;\ z \in P)$.

DIM. Per ogni $z \in P$, consideriamo l'applicazione $f_z : M \times N \to M \otimes (N \otimes P)$, tale che $f_z(x,y) = x \otimes (y \otimes z)$. f_z è biadditiva, e inoltre, per ogni $s \in S$, si ha: $f_z(xs,y) = xs \otimes (y \otimes z) = x \otimes s(y \otimes z) = x \otimes (sy \otimes z) = f_z(x, sy)$. Dunque f_z è bilanciata, e quindi vi è un morfismo $\tau_z : M \otimes_S N \to M \otimes_S (N \otimes P)$ tale che $\tau_z(\sum_i(x_i \otimes y_i)) = \sum_i(x_i \otimes (y_i \otimes z))$. Se ora definiamo $f : (M \otimes_S N) \times P \to M \otimes_S (N \otimes P)$ ponendo $f(\sum_i(x_i \otimes y_i), z) = \tau_z(\sum_i(x_i \otimes y_i)) = \sum_i x_i \otimes (y_i \otimes z)$, f è ben definita e risulta bilanciata, considerando $M \otimes_S N$ come T-modulo destro, e P come T-modulo sinistro. (Si vede subito che f è biadditiva. Risulta poi: $f(\sum(x_i \otimes y_i)t, z) = f(\sum(x_i \otimes y_i t), z) = \sum(x_i \otimes (y_i t \otimes z)) = \sum(x_i \otimes (y_i \otimes tz)) = f(\sum(x_i \otimes y_i), tz)$.) Dunque esiste un morfismo di gruppi abeliani $\tau : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P)$ tale che $(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{\tau} x \otimes (y \otimes z)$. Si verifica facilmente che τ è un morfismo di (R,U)-bimoduli.
In modo del tutto analogo, si può provare che vi è un morfismo di (R,U)-bimoduli $\zeta : M \otimes (N \otimes P) \to (M \otimes N) \otimes P$, tale che $x \otimes (y \otimes z) \xrightarrow{\zeta} (x \otimes y) \otimes z$. Chiaramente τ, ζ sono uno l'inverso dell'altro, e si ha l'asserto. □

Consideriamo ora i bimoduli $M = {}_R M_S$, $N = {}_S N_T$, $P = {}_U P_T$ (R, S, T, U anelli). $M \otimes N$ è allora un (R,T)-bimodulo, e per la Proposizione 2.2.1 $\mathrm{Hom}_T(M \otimes N, P)$ è un (U,R)-bimodulo. Sempre per la Proposizione 2.2.1, $\mathrm{Hom}_T(N,P)$ è un (U,S)-bimodulo, e quindi anche $\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N,P))$ è un (U,R)-bimodulo.
Se $f \in \mathrm{Hom}_T(M \otimes N, P)$, per ogni $x \in M$ l'applicazione $f_x : y \to f(x \otimes y)$ $(y \in N)$ è un elemento di $\mathrm{Hom}_T(N,P)$, come si verifica facilmente. Denotiamo con F l'applicazione $x \to f_x$; allora $F \in \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N,P))$, come si verifica osservando che $f_{x_1+x_2} = f_{x_1} + f_{x_2}$ e $f_{xs} = f_x s$. Abbiamo dunque un'applicazione $\phi : f \to F$ da $\mathrm{Hom}_T(M \otimes N, P)$ a $\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N,P))$.
Si ha il seguente:

Teorema 2.2.1 *L'applicazione* $\phi : \mathrm{Hom}_T(M \otimes N, P) \to \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N,P))$ *definita da* $f \xrightarrow{\phi} F$ *realizza un isomorfismo di* (U,R)*-bimoduli.*

DIM. ϕ è un omomorfismo di (U,R)-bimoduli (verifica diretta). Cerchiamo un omomorfismo nella direzione opposta, che funzioni da inverso di ϕ. Sia dunque $g \in \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N,P))$. Per ogni $x \in M$, $g(x) \in \mathrm{Hom}_T(N,P)$, e l'applicazione $h : M \times N \to P$ definita da $h(x,y) = g(x)(y)$ $(x \in M;\ y \in N)$ risulta bilanciata. Si ha infatti, per ogni $x, x_1, x_2 \in M$; $y, y_1, y_2 \in N$; $s \in S$: $h(x_1+x_2, y) = g(x_1+x_2)(y) = (g(x_1)+g(x_2))y = g(x_1)(y) + g(x_2)(y) = h(x_1,y) + h(x_2,y)$; $h(x, y_1+y_2) = g(x)(y_1 + y_2) = g(x)(y_1) + g(x)(y_2) = h(x,y_1) + h(x,y_2)$; $h(xs,y) = g(xs)(y) = (g(x)s)(y) = g(x)(sy) = h(x,sy)$. (Si noti che usiamo il fatto che $g(x) \in \mathrm{Hom}_T(N,P)$, che è un S-modulo destro per l'azione $g(x)s = g(x) \circ \epsilon_s$!) Si conclude che esiste un morfismo di gruppi abeliani $\mu : M \otimes_S N \to P$, tale che $\mu(x \otimes y) = g(x)(y)$. Ora, per ogni $t \in T$, si ha $\mu((x \otimes y)t) = \mu(x \otimes yt) = g(x)(yt) = g(x)(y)t = \mu(x \otimes y)t$. Dunque $\mu \in \mathrm{Hom}_T(M \otimes N, P)$. Posto $\psi(g) = \mu$, si vede che l'applicazione $\psi : \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N,P)) \to \mathrm{Hom}_T(M \otimes N, P)$ è tale che $(\phi \circ \psi)(g) = g$, e $(\psi \circ \phi)(f) = f$. Si conclude che ϕ è un isomorfismo. □

Osservazione. Siano $R = T = U = \mathbf{Z}$ nel Teorema precedente. Allora, pensando $M = {}_{\mathbf{Z}}M_S$, $N = {}_SN_{\mathbf{Z}}$ e $P = {}_{\mathbf{Z}}P_{\mathbf{Z}}$ (i.e. come gruppo abeliano), abbiamo l'isomorfismo (di gruppi abeliani)

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M \otimes_S N, P) \simeq \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, P)).$$

$(*)$, nel linguaggio delle categorie, esprime il fatto che il funtore $M \otimes_S$ dalla categoria S-mod alla categoria Ab (= $\mathbf{Z}$-mod) è *aggiunto sinistro* del funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, -)$ da Ab a S-mod. (Per ogni gruppo abeliano A, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, A)$ ha struttura di S-modulo sinistro ponendo, per ogni $s \in S$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, A)$: $(sf)(x) = f(xs)$ $(x \in M)$.)

Dal fatto categoriale che ogni funtore che ha un aggiunto destro preserva i coprodotti e i conuclei, si potrebbe allora dedurre direttamente il Lemma 2.1.2, così come la proprietà di esattezza del prodotto tensoriale che discuteremo nel prossimo paragrafo. (Cfr. ad esempio P. J. Hilton – U. Stammbach, "A Course in Homological Algebra", Springer 1971, p.110.)

Infine, ci serve per il seguito la seguente (ovvia):

Proposizione 2.2.5 *Siano M, M' (S, R)-bimoduli; N, N' R-moduli sinistri; $\alpha : {}_SM_R \to {}_SM'_R$ un omomorfismo di bimoduli; $\beta \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Allora $\alpha \otimes \beta : {}_SM_R \otimes_R N \to {}_SM'_R \otimes_R N'$ è un omomorfismo di S-moduli sinistri.*

Dim. Per ogni $s \in S$, $x \otimes y \in M \otimes_R N$, si ha: $(\alpha \otimes \beta)(s(x \otimes y)) = (\alpha \otimes \beta)(sx \otimes y) = \alpha(sx) \otimes \beta(y) = s\alpha(x) \otimes \beta(y) = s(\alpha(x) \otimes \beta(y)) = s(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y)$.
Similmente 'a destra'. □

2.3 Proprietà di esattezza dei prodotti tensoriali

Sappiamo che, se $f : M' \to M$ è un monomorfismo di R-moduli destri, e N è un arbitrario R-modulo sinistro, il prodotto tensoriale $f \otimes \mathrm{Id}_N$ non è in generale un monomorfismo (cfr. l'Osservazione 2 a pag. 16). Questa osservazione trova la sua espressione più conveniente in termini di sequenze esatte, traducendosi nel seguente risultato:
Se $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ è esatta, non necessariamente lo è la sequenza di $\mathbf{Z}$-moduli $0 \to M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N$.

Esempi

Sia $R = \mathbf{Z}$:

(1) (Cfr. Osservazione 2 pag. 16) La sequenza $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Q}$ è esatta, ma non lo è $0 \to \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (essendo $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, ma $i \otimes \mathrm{Id} = 0$).

(2) $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}$, ove $f : z \to 2z$, è esatta, ma non lo è $0 \to \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (poiché ancora $f \otimes \mathrm{Id} = 0$).

(3) $0 \to 2\mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z}$ è esatta, ma non lo è $0 \to 2\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}} \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, poiché $i \otimes \mathrm{Id} = 0$.

(In tutti gli esempi precedenti, ovviamente, 2 può essere sostituito da un fissato intero $m \geq 2$.)

Dunque non è vero in generale che, se una sequenza di R-moduli destri e R-omomorfismi è esatta, allora la sequenza di $\mathbf{Z}$-moduli ottenuta "tensorizzando a destra" con un arbitrario R-modulo sinistro N, sia esatta.
Risultato analogo si ha ovviamente se si considerano sequenze di R-moduli sinistri e si tensorizzano a sinistra con un arbitrario R-modulo destro M.
Nel linguaggio delle categorie ciò si esprime dicendo che i funtori $\otimes_R N$ e $M \otimes_R$ non sono in generale *esatti*. Tuttavia, essi sono *esatti a destra*, nel senso della seguente:

Proposizione 2.3.1

i) *Sia* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *una sequenza esatta di R-moduli destri. Allora, per ogni R-modulo sinistro N, la sequenza di $\mathbf{Z}$-moduli* $M' \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}} M \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}} M'' \otimes_R N \to 0$ *è esatta.*

ii) *Sia* $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ *una sequenza esatta di R-moduli sinistri. Allora, per ogni R-modulo destro M, la sequenza di $\mathbf{Z}$-moduli* $M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes g} M \otimes_R N'' \to 0$ *è esatta.*

DIM. *i)* Supponiamo che la sequenza $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ sia esatta (cioè che $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ e che g sia un epimorfismo). Consideriamo $M'' \otimes_R N$: poiché g è suriettivo, ogni $z \in M'' \otimes_R N$ ha la forma $z = \sum g(x_i) \otimes y_i$ ($x_i \in M$; $y_i \in N$). Ne segue che $g \otimes \mathrm{Id} : M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N$ è suriettivo. Resta dunque da provare che $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{Id})$. Chiaramente, poiché $g \circ f = 0$, $(g \otimes \mathrm{Id}) \circ (f \otimes \mathrm{Id}) = (g \circ f) \otimes (\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id}) = 0 \otimes \mathrm{Id} = 0$, e pertanto $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) \subseteq \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{Id})$. Allora il Teorema fondamentale sugli omomorfismi di R-moduli ci assicura che $g \otimes \mathrm{Id}$ induce un omomorfismo $\Gamma : \big(M \otimes_R N\big)\big/\big(\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id})\big) \to M'' \otimes_R N$ definito da $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) + x \otimes y \to g(x) \otimes y$, e che Γ è un isomorfismo se e solo se $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{Id})$.
Proviamo dunque che Γ è un isomorfismo. A tale scopo, siano $y \in N$, $x'' \in M''$, e sia $x \in M$ tale che $x'' = g(x)$. Osserviamo che il laterale $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) + x \otimes y$ è indipendente dalla scelta di x. (Siano infatti $x_1, x_2 \in M$ tali che $g(x_1) = g(x_2) = x''$. Poiché $g(x_1 - x_2) = 0$, $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, e dunque esiste $x' \in M'$ tale che $f(x') = x_1 - x_2$. Ma allora $(x_1 - x_2) \otimes y = (f \otimes \mathrm{Id})(x' \otimes y) \in \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id})$, e questo prova che $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) + x_1 \otimes y = \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) + x_2 \otimes y$.) Consideriamo perciò l'applicazione $t : M'' \times N \to \big(M \otimes_R N\big)\big/\big(\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id})\big)$ definita da $(x'', y) \longrightarrow \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) + x \otimes y$ (ove $g(x) = x''$). t è ben definita, e si vede subito che è bilanciata; pertanto t si estende a un morfismo $\alpha_t : M'' \otimes_R N \to \big(M \otimes_R N\big)\big/\big(\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id})\big)$, tale che $\alpha_t(x'' \otimes y) = \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}) + x \otimes y$ (con $g(x) = x''$). È chiaro che α_t è l'inverso di Γ, e dunque Γ è un isomorfismo.
ii) Si prova in modo simile. □

Osservazione. Per la Proposizione precedente, si ha in particolare che, se la sequenza $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ è esatta, lo è anche la sequenza $M \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}} M'' \otimes_R N \to 0$. In altre parole, se $g : M \to M''$ è un *epimorfismo* di R-moduli, lo è anche $g \otimes \mathrm{Id} : M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N$, per un arbitrario R-modulo sinistro N.

Definizione 2.3.1 *I moduli (sinistri) N per i quali $\otimes_R N$ è un funtore esatto, i.e. si conservano le sequenze esatte tensorizzando (a destra) con N, si dicono* **piatti**.

Proposizione 2.3.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un R-modulo (sinistro) N sia piatto è che $\otimes_R N$ conservi i monomorfismi.*

DIM. La condizione è banalmente necessaria. Proviamone la sufficienza. Se $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ esatta implica $0 \to M' \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}} M \otimes_R N$ esatta, poiché per la Proposizione 2.3.1 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ esatta implica $M' \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}} M \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}} M'' \otimes_R N \to 0$ esatta, si ottiene ovviamente che $\otimes_R N$ conserva tutte le sequenze esatte corte. L'asserto segue non appena si tenga conto del fatto che ogni sequenza esatta si spezza in sequenze esatte corte. (Infatti, se la sequenza $(*)$ $\quad M_0 \to \cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots \to M_n$ è esatta, per ciascun i si ha la sequenza esatta corta $0 \to \mathrm{Im}(f_i) \xrightarrow{i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} \mathrm{Im}(f_{i+1}) \to 0$, e $(*)$ si compone di tali sequenze esatte corte.) □

È facile provare che tutti i moduli liberi sono piatti. A tale scopo, bastano i seguenti Lemmi:

Lemma 2.3.1 *$R = {}_R R$ è un modulo piatto.*

DIM. Si tratta di provare che se $f : M' \to M$ è un monomorfismo, lo è anche $f \otimes \mathrm{Id} : M' \otimes_R R \to M \otimes_R R$. A tale scopo, notiamo che (cfr. Lemma 2.1.1, *ii)*) l'applicazione $x \otimes 1 \to x$ è un isomorfismo fra $M \otimes_R R$ e M. Ne segue che, per ogni $x' \in M'$, $(f \otimes \mathrm{Id})(x' \otimes 1) = f(x') \otimes 1 = 0$ implica $f(x') = 0$. Donde la tesi. □

Lemma 2.3.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un R-modulo $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ sia piatto, è che ciascun addendo diretto N_i sia piatto.*

DIM. Sia $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ una sequenza esatta. Occorre provare che $0 \to M' \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N$ è esatta se e solo se per ogni $i \in I$ è esatta la sequenza $0 \to M' \otimes_R N_i \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_{N_i}} M \otimes_R N_i$. Bisogna cioè provare che $f \otimes \mathrm{Id}_N$ è iniettiva se e solo se lo è $f \otimes \mathrm{Id}_{N_i}$, per ogni $i \in I$. Consideriamo allora gli isomorfismi (cfr. Lemma 2.1.2) $\beta : \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i) \to M \otimes_R N$ definito da $\beta(x \otimes y_i) = x \otimes y_i$ ($x \in M$, $y_i \in N_i$), $\beta' : \bigoplus_{i\in I}(M' \otimes_R N_i) \to M' \otimes_R N$ definito da $\beta'(x' \otimes y_i) = x' \otimes y_i$ ($x' \in M'$, $y_i \in N_i$), e l'omomorfismo $\bar{f} : \bigoplus_{i\in I}(M' \otimes_R N_i) \to \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i)$ definito ponendo $\bar{f}_{|M' \otimes_R N_i} = f \otimes \mathrm{Id}_{N_i}$ per ogni i. Si ha: $\beta \circ \bar{f} = (f \otimes \mathrm{Id}_N) \circ \beta'$. Poiché β, β' sono isomorfismi, $\bar{f}$ è iniettivo se e solo se lo è $f \otimes \mathrm{Id}_N$. D'altra parte, $\bar{f}$ è iniettivo se e solo se lo è $f \otimes \mathrm{Id}_{N_i}$ per ogni i. Donde la tesi. □

Corollario 2.3.1 *Ogni R-modulo libero N è piatto.*

DIM. Si applicano i Lemmi 2.3.1 e 2.3.2, ossservando che $N \simeq \bigoplus {}_R R$. $\square$

Corollario 2.3.2 *Ogni R-modulo N, che sia addendo diretto di un R-modulo libero, è piatto.*

(Un tale R-modulo si dice *proiettivo*, e.g. cfr. N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman 1989.)

2.4 Restrizione e estensione degli scalari

Siano R, S anelli con 1, e si supponga che $f : R \to S$ sia un omomorfismo di anelli.

1.

Sia M un S-modulo sinistro, e si definisca un'azione di R su M ponendo, per ogni $r \in R$, $x \in M$: $rx = f(r)x$. Si verifica facilmente che, essendo f un morfismo di anelli, per tale azione M acquista la struttura di R-modulo sinistro. Si usa dire che l'R-modulo M è ottenuto per *restrizione degli scalari*.

Se inoltre M è un (S, S)-bimodulo, restringendo gli scalari a destra, cioè definendo, per ogni $r \in R$, $x \in M$: $xr = xf(r)$, si ha su M anche una struttura di R-modulo destro (anzi di (S, R)-bimodulo).

Queste considerazioni si applicano in particolare al caso in cui $M = S = {}_S S_S$, che perciò si può considerare come (S, R)-bimodulo ($S = {}_S S_R$, con restrizione degli scalari a destra, come appena visto).

2.

Sia ora M un R-modulo sinistro, e come in **1.** si consideri l'anello S come (S, R)-bimodulo: $S = {}_S S_R$. Allora (cfr. Corollario 2.2.1) il prodotto tensoriale ${}_S M = {}_S S_R \otimes_R M$ è un S-modulo sinistro per l'azione $s(s_1 \otimes x) = (ss_1) \otimes x$ ($s, s_1 \in S$; $x \in M$).

Definizione 2.4.1 *Diremo che ${}_S M = {}_S S_R \otimes_R M$ è il modulo ottenuto da M per* **estensione degli scalari**.

(Si pensi al caso $f = i : R \to S$, R sottoanello di S, i inserzione di R in S.)

Proposizione 2.4.1

i) Se M è generato come R-modulo sinistro dal sottoinsieme X, ${}_S M$ è generato come S-modulo sinistro dal sottoinsieme

$$1_S \otimes X = \{1_S \otimes x \mid x \in X\}.$$

ii) Se M è un R-modulo libero su X, ${}_S M$ è un S-modulo libero sull'insieme $1_S \otimes X$.

DIM. *i)* Sia $M = \sum_{x \in X} Rx$. Allora ${}_SM = {}_SS_R \otimes_R (\sum_{x\in X} Rx) = \sum_{x \in X} (\mathrm{Id}_S \otimes i_x) \cdot ({}_SS_R \otimes_R Rx)$ (ove i_x denota l'inserzione $Rx \to M$). Poiché ${}_SS_R \otimes_R Rx = S(1_S \otimes x)$, si deduce appunto che $1_S \otimes X$ genera ${}_SM$. (Si noti che, per ogni $r \in R$, $s \in S$, si ha $s \otimes rx = sf(r) \otimes x$, ovvero, posto $sf(r) = s_1$, $s \otimes rx = s_1 \otimes x = s_1(1_S \otimes x)$.)

ii) Per ipotesi, $M = \bigoplus_{x\in X} Rx$, con $Rx \simeq {}_RR$ per ogni $x \in X$. È ${}_SM = \bigoplus_{x \in X}(\mathrm{Id}_S \otimes i_x)({}_SS_R \otimes_R Rx) \simeq \bigoplus_{x\in X}({}_SS_R \otimes_R Rx) = \bigoplus_{x\in X} S(1_S \otimes x)$. D'altra parte $S(1_S \otimes x) = {}_SS_R \otimes_R Rx \simeq {}_SS_R \otimes_R R \simeq S$ come S-modulo sinistro (Lemma 2.2.1, *i)*), donde la tesi. □

Osservazione 1. La situazione classica alla quale si applica la Proposizione precedente è quella in cui V è uno spazio vettoriale su un campo K (e.g. $K = \mathbf{R}$), K è sottocampo di un campo E (e.g. $E = \mathbf{C}$), e $f = i$ è l'inserzione naturale di K in E. Allora, per estensione degli scalari si ottiene lo spazio ${}_EV = E \otimes_K V$ sul campo E, e ad ogni base X di V su K corrisponde la base $1 \otimes X$ di ${}_EV$ su E. In particolare, se V è finitamente generato su K, ad ogni base $(v_1, \dots, v_n)$ di V su K corrisponde la base $(1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n)$ di ${}_EV$ su E, e $\dim_E({}_EV) = \dim_K V = n$.
(In termini intuitivi, si può pensare ${}_EV$ come lo spazio su E ottenuto scegliendo una base $(v_i)_{i\in I}$ di V su K, e considerando le combinazioni lineari formali $\sum \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in E$. L'uso del prodotto tensoriale rende canonica (cioè indipendente dalla scelta di una base di V su K) tale costruzione.)

Osservazione 2. Altra importante istanza in cui si applica l'estensione degli scalari è la seguente:
Si consideri un gruppo abeliano additivo A, un campo arbitrario K, e si denoti con $c : \mathbf{Z} \to K$ l'omomorfismo di anelli $z \xrightarrow{c} z1_K$ (che associa a ogni $z \in \mathbf{Z}$ il multiplo secondo z dell'unità 1_K di K). Allora, per estensione degli scalari, si ottiene il K-modulo ${}_KA = {}_KK_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} A = K \otimes_{\mathbf{Z}} A$. In altre parole, si dà allo $\mathbf{Z}$-modulo A la struttura di spazio vettoriale su K (e $\dim_K({}_KA) = \mathrm{rango}(A)$ se A è uno $\mathbf{Z}$-modulo libero).

Nota. Al solito, se M non è un R-modulo piatto, il modulo esteso ${}_SM$ può "collassare". Così, ad esempio, nella situazione dell'Osservazione 2, se A è finito, si ha $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A = 0$ (infatti, posto $|A| = m$, per ogni $a \in A$ si ha $1 \otimes a = (1/m)m \otimes a = (1/m) \otimes ma = (1/m) \otimes 0 = 0$).

In altri termini, se $f : R \to S$ è un monomorfismo, $i \otimes \mathrm{Id}_M : R \otimes_R M \to S \otimes_R M$ non è in generale un monomorfismo ($i \otimes \mathrm{Id}_A = 0$ nell'esempio precedente).

3. Estensione delle applicazioni lineari

Siano R un sottoanello di un anello S, $i : R \to S$ l'inserzione naturale, $t : M \to N$ un morfismo di R-moduli (sinistri).
Allora le applicazioni $j_M : M \to {}_SM$, $x \xrightarrow{j_M} 1 \otimes x$; $j_N : N \to {}_SN$, $y \xrightarrow{j_N} 1 \otimes y$ sono R-lineari (considerando ${}_SM$, ${}_SN$ come R-moduli (sinistri), per restrizione degli scalari),

ed esiste un unico morfismo di S-moduli $t_S : {}_SM \to {}_SN$ tale che sia commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_M"] \arrow[d, "t"'] & {}_SM \arrow[d, "t_S"] \\ N \arrow[r, "j_N"'] & {}_SN \end{tikzcd}$$

i.e. $t_S \circ j_M = j_N \circ t$.
t_S è l'applicazione $\mathrm{Id}_S \otimes t : S \otimes_R M \to S \otimes_R N$ (cfr. Proposizione 2.2.5). Si dice che t_S è la *S-estensione* di t.

4.

Come applicazione del principio di estensione degli scalari, siamo ora in grado di provare, in modo conciso, che, se M è un modulo libero finitamente generato su un anello *commutativo* K, tutte le basi di M hanno la stessa cardinalità.
Iniziamo con l'osservare che, *se M è un K-modulo libero finitamente generato, ogni base X di M è necessariamente finita.*
Sia infatti S un insieme *finito* di generatori di M. Ogni elemento di S è allora combinazione lineare finita di elementi di X. Sia X' il sottoinsieme di X costituito dagli elementi di X che compaiono con coefficienti non-nulli in tali combinazioni lineari. X' è evidentemente finito. D'altra parte ogni elemento di M è esprimibile come combinazione lineare di elementi di X'. Segue $X' = X$.

Proposizione 2.4.2 *Ogni base di M ha la stessa cardinalità $n < \infty$. (Si dice che n è il* **rango** *di M (su K).)*

DIM. In forza del lemma di Zorn, K contiene un ideale bilatero massimale I. Poiché K è commutativo, l'anello quoziente $F = K/I$ è, come ben noto, un campo. Sia $\pi : K \to K/I = F$ l'epimorfismo canonico, e si consideri, per estensione degli scalari, l'F-modulo $F \otimes_K M$. Si è provato (cfr. Proposizione 2.4.1, *ii)*) che, se X è una qualsiasi base di M su K, $1_F \otimes X$ è una base per $F \otimes_K M = {}_FM$ su F. Dunque, se $|X| = n < \infty$, ${}_FM$ è uno spazio vettoriale di dimensione n su F. Ciò prova l'asserto. □

2.5 Prodotti tensoriali di moduli su anelli commutativi

Se si suppone che l'anello R sia commutativo, la teoria dei prodotti tensoriali di R-moduli si semplifica e insieme si arricchisce.

Ricordiamo innanzitutto che:

1) Ogni R-modulo sinistro (destro) M si può considerare come R-modulo destro (sinistro) definendo *la stessa azione* a destra (a sinistra), cioè ponendo $xr = rx$ per ogni $r \in R$, $x \in M$. Dunque, se R è commutativo, si può parlare semplicemente di R-moduli (senza ulteriori specificazioni).

2) Se si considerano simultaneamente i prodotti esterni descritti in 1), M ha la struttura di (R, R)-bimodulo: $M = {}_R M_R$ (cfr. Esempio **(1)** a pag. 17).

3) Se M, N sono R-moduli, $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ha una naturale struttura di R-modulo (definendo $(rf)(x) = rf(x)$ per ogni $r \in R$, $x \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$). Inoltre, la moltiplicazione per uno scalare r ($x \to rx$, per ogni $x \in M$) è un R-endomorfismo di M (cfr. Capitolo 1, e Paragrafo 2.2).

Consideriamo ora il prodotto tensoriale $M \otimes_R N$ di due R-moduli M, N. Se li pensiamo entrambi come (R, R)-bimoduli, $M \otimes_R N$ ha una naturale struttura di (R, R)-bimodulo per le azioni $r(x \otimes y) = (rx) \otimes y$; $(x \otimes y)r = x \otimes (yr)$ ($r \in R$, $x \in M$, $y \in N$) (Proposizione 2.2.3).
E poiché: $(*)$ $\quad rx \otimes y = xr \otimes y = x \otimes ry = x \otimes yr$, vediamo che le azioni a sinistra e a destra sono le stesse, così che possiamo considerare $M \otimes_R N$ semplicemente come R-modulo (sinistro o destro).

Preferiremo spesso, come è uso comune, dire che un R-omomorfismo di moduli su un anello commutativo R è una *applicazione R-lineare*, e che:

Definizione 2.5.1 *Un'applicazione $f : M \times N \to P$ (M, N, P R-moduli) è* **R-bilineare** *se sono R-lineari le applicazioni $x \to f(x, y)$ e $y \to f(x, y)$ (per ogni fissato $y \in N$ e per ogni fissato $x \in M$, rispettivamente). In altre parole f è R-bilineare se:*

1) f è biadditiva in x e y;

2) $f(rx, y) = rf(x, y) = f(x, ry) \qquad (x \in M;\ y \in N;\ r \in R)$.

Si vede allora che l'applicazione $\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$ è R-bilineare (infatti: $rx \otimes y = r(x \otimes y) = x \otimes ry$ (cfr. $(*)$)). D'altra parte ogni applicazione R-bilineare $f : M \times N \to P$ è bilanciata, in forza di *1)* e *2)* (e del fatto che $xr = rx$), e dunque esiste un omomorfismo $\alpha_f : M \otimes_R N \to P$ tale che $\alpha_f(x \otimes y) = f(x, y)$. Orbene, α_f è R-lineare, poiché $\alpha_f(r(x \otimes y)) = \alpha_f(rx \otimes y) = f(rx, y) = rf(x, y) = r\alpha_f(x \otimes y)$. Dunque ad ogni applicazione R-bilineare $f : M \times N \to P$ corrisponde un'applicazione R-lineare $\alpha_f : M \otimes_R N \to P$. Inversamente, è chiaro che se ϕ è una qualunque applicazione R-lineare da $M \otimes_R N$ a P, $f = \phi \circ \otimes$ è un'applicazione R-bilineare da $M \times N$ a P, tale che $\alpha_f = \phi$. Vi è dunque una biiezione $f \leftrightarrow \alpha_f$: assegnare un'applicazione R-bilineare da $M \times N$ a P equivale ad assegnare un'applicazione R-lineare da $M \otimes_R N$ a P.
Ma possiamo dire di più. Sappiamo infatti (cfr. 3)) che $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P)$, essendo R commutativo, è un R-modulo rispetto alla somma e al prodotto per uno

scalare definiti 'puntualmente'. È d'altronde immediato verificare che l'insieme $\mathrm{Bilin}_R(M,N;P)$ delle applicazioni R-bilineari da $M\times N$ a P è anch'esso un R-modulo rispetto alle operazioni 'puntuali' $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$; $(rf)(x,y) = rf(x,y)$ ($x \in M$, $y \in N$; $f,g \in \mathrm{Bilin}_R(M,N;P)$; $r \in R$). (In particolare $rf \in \mathrm{Bilin}_R(M,N;P)$, per la commutatività di R!) Ed è facile riconoscere che, essendo $\alpha_{f+g} = \alpha_f + \alpha_g$, e $\alpha_{rf} = r\alpha_f$, la biiezione $f \leftrightarrow \alpha_f$ è un *isomorfismo di R-moduli*, i.e. $\mathrm{Bilin}_R(M,N;P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P)$, come R-moduli.

Valgono poi le seguenti identità (= isomorfismi di R-moduli):

1) $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$ (*commutatività*)

   (Cfr. l'Esercizio a pagina 16: $R = R^{\mathrm{op}}$, e l'isomorfismo $\mu : x \otimes y \to y \otimes x$ è R-lineare, poiché $\mu(r(x\otimes y)) = \mu(rx \otimes y) = y \otimes rx = r(y \otimes x) = r\mu(x \otimes y)$.)

2) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$ (*associatività*)

   (Cfr. Proposizione 2.2.4: $R = S = T = U$, e $(x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$ realizza un isomorfismo di R-moduli.)

3) $R \otimes_R N \simeq N$

   (Cfr. Lemma 2.2.1; $r \otimes y \to ry$ è R-lineare.)

4) Se $M = \bigoplus_i M_i$, $N = \bigoplus_j N_j$, $M \otimes_R N \simeq \bigoplus_{i,j} M_i \otimes_R N_j$ (*conservazione delle somme dirette*)

   (Lemma 2.2.2.)

Conseguenza di 3) e 4) è la seguente:

Proposizione 2.5.1 *Se M è un R-modulo libero su X e N è un R-modulo libero su Y, $M \otimes_R N$ è un R-modulo libero su $X \otimes Y = \{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$.*

DIM. $M = \bigoplus_{x\in X} Rx$, $N = \bigoplus_{y \in Y} Ry$, con $Rx \simeq Ry \simeq R$ (come R-moduli). Per 4), $M \otimes_R N \simeq \bigoplus (Rx \otimes_R Ry)$. D'altronde, in forza di 3), $R \simeq Rx \otimes_R Ry = R(x \otimes y)$. Si conclude che $X \otimes Y$ è una base per $M \otimes_R N$. □

Osservazione. Notiamo infine che se $\alpha : M \to M'$, $\beta : N \to N'$ sono applicazioni R-lineari, il prodotto tensoriale $\alpha \otimes \beta : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ è R-lineare. (Cfr. Proposizione 2.2.5: α e β sono in particolare omomorfismi di (R,R)-bimoduli, e quindi $\alpha \otimes \beta$ è un omomorfismo di R-moduli. Oppure, per verifica diretta.)

Inoltre: per la proprietà di esattezza del prodotto tensoriale (Proposizione 2.3.1) *se $\alpha : M \to M'$, $\beta : N \to N'$ sono epimorfismi, $\alpha \otimes \beta : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ è un epimorfismo.* (Infatti $\alpha \otimes \mathrm{Id}_N$ e $\mathrm{Id}_{M'} \otimes \beta$ sono epimorfismi. Ne segue che il prodotto $(\mathrm{Id}_{M'} \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes \mathrm{Id}_N) = (\mathrm{Id}_{M'} \circ \alpha) \otimes (\beta \circ \mathrm{Id}_N) = \alpha \otimes \beta$ è anch'esso un epimorfismo.)

Le considerazioni finora svolte e i risultati ottenuti si applicano al caso in cui $R = K$ è un campo, i.e. al prodotto tensoriale di spazi vettoriali su un campo K. Notiamo in particolare e esplicitamente che:

1. Se U, V sono spazi vettoriali su K, $U \otimes_K V$ è uno spazio vettoriale su K. Se X, Y sono delle basi di U, V rispettivamente, $X \otimes Y$ è una base di $U \otimes_K V$. In particolare, se U e V sono finitamente generati, $\dim_K(U \otimes_K V) = (\dim_K U)(\dim_K V)$.
(Osserviamo anche che, per ogni $0 \neq x \in U$, $0 \neq y \in V$, è $x \otimes y \neq 0$. Infatti x e y si possono pensare appartenenti a due basi X, Y di U, V rispettivamente; segue che $x \otimes y$ appartiene alla base $X \otimes Y$ di $U \otimes_K V$, e quindi non può essere il vettore nullo.)
2. Siano $\alpha : U \to U'$, $\beta : V \to V'$ applicazioni lineari fra spazi vettoriali sul campo K. Allora, se α, β sono monomorfismi (risp. epimorfismi), $\alpha \otimes \beta : U \otimes_K V \to U' \otimes_K V'$ è un monomorfismo (risp. epimorfismo).
(Argomentando come nell'Osservazione precedente: se $\alpha : U \to U'$ è mono (epi), $\alpha \otimes \mathrm{Id}_V : U \otimes_K V \to U' \otimes_K V$ è mono (epi). Se $\beta : V \to V'$ è mono (epi), $\mathrm{Id}_{U'} \otimes \beta : U' \otimes_K V \to U' \otimes_K V'$ è mono (epi). Segue che $(\mathrm{Id}_{U'} \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes \mathrm{Id}_V)$ è mono (epi). Ma $(\mathrm{Id}_{U'} \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes \mathrm{Id}_V) = (\mathrm{Id}_{U'} \circ \alpha) \otimes (\beta \circ \mathrm{Id}_V) = \alpha \otimes \beta$.)

Esercizio

Provare che, se $\alpha : U \to U'$, $\beta : V \to V'$ sono applicazioni K-lineari, si ha:

(1) $\mathrm{Im}(\alpha \otimes \beta) = \mathrm{Im}(\alpha) \otimes \mathrm{Im}(\beta)$;

(2) $\mathrm{Ker}(\alpha \otimes \beta) = \mathrm{Ker}(\alpha) \otimes V + U \otimes \mathrm{Ker}(\beta)$.

2.6 Prodotto di Kronecker di due matrici

Supponiamo che U, V siano spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K. Siano $\dim_K U = n$, $\dim_K V = m$, e siano $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ basi di U, V rispettivamente. Siano infine $\alpha : U \to U$, $\beta : V \to V$ applicazioni lineari, e si considerino le matrici rappresentative di α e β rispetto alle basi X, Y, cioè le matrici $M(\alpha) = (\alpha_{ji})$, $M(\beta) = (\beta_{ji})$, ove $\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} x_j$, $\beta(y_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} y_j$. Vogliamo determinare la matrice rappresentativa dell'applicazione K-lineare $\alpha \otimes \beta$ rispetto alla base $X \otimes Y$, che pensiamo ordinata negli m blocchi (costituiti ciascuno da n vettori): $x_1 \otimes y_j, \ldots, x_n \otimes y_j$ $(1 \leq j \leq m)$. Poiché $(\alpha \otimes \beta)(x_i \otimes y_j) = \alpha(x_i) \otimes \beta(y_j) = (\sum_r \alpha_{ri} x_r) \otimes (\sum_s \beta_{sj} y_s) = \sum_{r,s} \alpha_{ri} \beta_{sj} (x_r \otimes y_s)$, si vede che la matrice $M(\alpha \otimes \beta)$ richiesta è composta da m^2 blocchi (ciascuno quadrato di ordine n), dove il blocco "di posto (s,j)" (posto cioè all'incrocio delle righe indiciate $x_1 \otimes y_s, \ldots, x_n \otimes y_s$, e delle colonne indiciate $x_1 \otimes y_j, \ldots, x_n \otimes y_j$) è la matrice $\beta_{sj} M(\alpha)$. In altri termini, $M(\alpha \otimes \beta)$ si ottiene da $M(\beta)$ sostituendo ogni elemento β_{sj} con la matrice $n \times n$ $\beta_{sj} M(\alpha)$.
In generale, date due matrici A, B quadrate di ordine n, m rispettivamente, a elementi in K, si denota con $A \otimes B$, e si chiama prodotto tensoriale (o *di Kronecker*) di A e B, la matrice di ordine nm ottenuta da B sostituendo ogni suo elemento b_{ik} con la matrice $b_{ik} A$. In particolare dunque: $M(\alpha \otimes \beta) = M(\alpha) \otimes M(\beta)$.

scalare definiti 'puntualmente'. È d'altronde immediato verificare che l'insieme $\mathrm{Bilin}_R(M,N;P)$ delle applicazioni R-bilineari da $M\times N$ a P è anch'esso un R-modulo rispetto alle operazioni 'puntuali' $(f+g)(x,y) = f(x,y)+g(x,y)$; $(rf)(x,y) = rf(x,y)$ ($x\in M$, $y\in N$; $f,g\in \mathrm{Bilin}_R(M,N;P)$; $r\in R$). (In particolare $rf\in \mathrm{Bilin}_R(M,N;P)$, per la commutatività di R!) Ed è facile riconoscere che, essendo $\alpha_{f+g}=\alpha_f+\alpha_g$, e $\alpha_{rf}=r\alpha_f$, la biiezione $f\leftrightarrow \alpha_f$ è un *isomorfismo di R-moduli*, i.e. $\mathrm{Bilin}_R(M,N;P)\simeq \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N,P)$, come R-moduli.

Valgono poi le seguenti identità (= isomorfismi di R-moduli):

1) $M\otimes_R N\simeq N\otimes_R M$ (*commutatività*)

   (Cfr. l'Esercizio a pagina 16: $R=R^{\mathrm{op}}$, e l'isomorfismo $\mu: x\otimes y\to y\otimes x$ è R-lineare, poiché $\mu(r(x\otimes y))=\mu(rx\otimes y)=y\otimes rx=r(y\otimes x)=r\mu(x\otimes y)$.)

2) $(M\otimes_R N)\otimes_R P\simeq M\otimes_R(N\otimes_R P)$ (*associatività*)

   (Cfr. Proposizione 2.2.4: $R=S=T=U$, e $(x\otimes y)\otimes z\to x\otimes(y\otimes z)$ realizza un isomorfismo di R-moduli.)

3) $R\otimes_R N\simeq N$

   (Cfr. Lemma 2.2.1; $r\otimes y\to ry$ è R-lineare.)

4) Se $M=\bigoplus_i M_i$, $N=\bigoplus_j N_j$, $M\otimes_R N\simeq\bigoplus_{i,j} M_i\otimes_R N_j$ (*conservazione delle somme dirette*)

   (Lemma 2.2.2.)

Conseguenza di 3) e 4) è la seguente:

Proposizione 2.5.1 *Se M è un R-modulo libero su X e N è un R-modulo libero su Y, $M\otimes_R N$ è un R-modulo libero su $X\otimes Y=\{x\otimes y\mid x\in X, y\in Y\}$.*

DIM. $M=\bigoplus_{x\in X} Rx$, $N=\bigoplus_{y\in Y} Ry$, con $Rx\simeq Ry\simeq R$ (come R-moduli). Per 4), $M\otimes_R N\simeq\bigoplus(Rx\otimes_R Ry)$. D'altronde, in forza di 3), $R\simeq Rx\otimes_R Ry=R(x\otimes y)$. Si conclude che $X\otimes Y$ è una base per $M\otimes_R N$. □

Osservazione. Notiamo infine che se $\alpha: M\to M'$, $\beta: N\to N'$ sono applicazioni R-lineari, il prodotto tensoriale $\alpha\otimes\beta: M\otimes_R N\to M'\otimes_R N'$ è R-lineare. (Cfr. Proposizione 2.2.5: α e β sono in particolare omomorfismi di (R,R)-bimoduli, e quindi $\alpha\otimes\beta$ è un omomorfismo di R-moduli. Oppure, per verifica diretta.)

Inoltre: per la proprietà di esattezza del prodotto tensoriale (Proposizione 2.3.1) *se $\alpha: M\to M'$, $\beta: N\to N'$ sono epimorfismi, $\alpha\otimes\beta: M\otimes_R N\to M'\otimes_R N'$ è un epimorfismo.* (Infatti $\alpha\otimes\mathrm{Id}_N$ e $\mathrm{Id}_{M'}\otimes\beta$ sono epimorfismi. Ne segue che il prodotto $(\mathrm{Id}_{M'}\otimes\beta)\circ(\alpha\otimes\mathrm{Id}_N)=(\mathrm{Id}_{M'}\circ\alpha)\otimes(\beta\circ\mathrm{Id}_N)=\alpha\otimes\beta$ è anch'esso un epimorfismo.)

(Kronecker per primo introdusse, nella seconda metà dell'800, tale prodotto; e di fatto si servì dei prodotti tensoriali nella trattazione dell'algebra lineare e multilineare.)

Esercizi

Siano A, B matrici quadrate di ordine n, m a elementi in K:

(1) $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$

(2) $\mathrm{Det}(A \otimes B) = (\mathrm{Det}A)^m(\mathrm{Det}B)^n$

(3) $(A \otimes B)^t = (A^t) \otimes (B^t)$

(4) se A, B sono invertibili, $(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1}) \otimes (B^{-1})$